

Verbesserung geophysikalischer Parameter mit Hilfe beobachteter Erdrotationsparameter



*Stephanie Kirschner, Delf Neubersch
und Florian Seitz*



Technische Universität München

ESPACE



Übersicht

- Motivation
- Euler-Liouville Gleichung
- Ansatz zur Inversion
 - Ausgleichung
 - Simulation
 - CO4-Zeitreihe
 - Adaptive Kalman Filterung
- Zusammenfassung
- Ausblick



Motivation

- Präzise Beobachtung der Erdrotationsparameter (ERP: Polbewegung und Tageslängenänderung) über geodätische Messverfahren
- In den Zeitreihen der ERP spiegeln sich dynamische Prozesse im Erdsystem wider
- Simulation der Erdrotationsparameter ist abhängig von physikalische Erdparameter z.B. Lovezahlen

Ziel: Verbesserung der physikalischen Erdparameter über eine Inversion der Euler-Liouville Gleichung



Euler-Liouville Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) = \mathbf{L}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix}$$

\mathbf{I} : Trägheitstensor
 $\boldsymbol{\omega}$: Rotationsvektor der Erde
 \mathbf{h} : Relativer Drehimpuls
 \mathbf{L} : Externe Drehmomente

Vereinfachungen:

- Linearisierung:
Terme, in denen Produkte der kleinen Größen m_i , c_{ij} und h_i oder ihre zeitlichen Ableitungen vorkommen, werden vernachlässigt
- Vernachlässigung der externen Drehmomente
- Zunächst Vernachlässigung der Anregungen (Ozean, Atmosphäre und Gezeiten)



Euler-Liouville Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}) = \mathbf{L}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix}$$

I: Trägheitstensor
ω: Rotationsvektor der Erde
h: Relativer Drehimpuls
L: Lunisolare Drehmomente

Vereinfachte Euler-Liouville Gleichung:

$$\dot{m}_1 \cdot \frac{A}{\Omega(C-A)} + m_2 - \frac{1}{C-A} \frac{\Omega^2 a^5}{3G} (\Re(k_2) \cdot m_2 - \Im(k_2) \cdot m_1) + \frac{1}{(C-A)} \frac{\Omega a^5}{3G} (\Re(k_2) \cdot \dot{m}_1 + \Im(k_2) \cdot \dot{m}_2) = 0$$

$$\dot{m}_2 \cdot \frac{A}{\Omega(C-A)} - m_1 + \frac{1}{C-A} \frac{\Omega^2 a^5}{3G} (\Re(k_2) \cdot m_1 + \Im(k_2) \cdot m_2) + \frac{1}{(C-A)} \frac{\Omega a^5}{3G} (\Re(k_2) \cdot \dot{m}_2 - \Im(k_2) \cdot \dot{m}_1) = 0$$



Ansatz zur Inversion: Ausgleichung mit dem Gauß-Helmert Modell

Stochastisches Modell: $\Sigma_{\parallel} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\parallel}$

Gauß-Helmert Modell:
(bedingte Ausgleichung) $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{w} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{A} \cdot \Delta \hat{\mathbf{x}} = 0$

B-Matrix: $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{L}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{L}}$

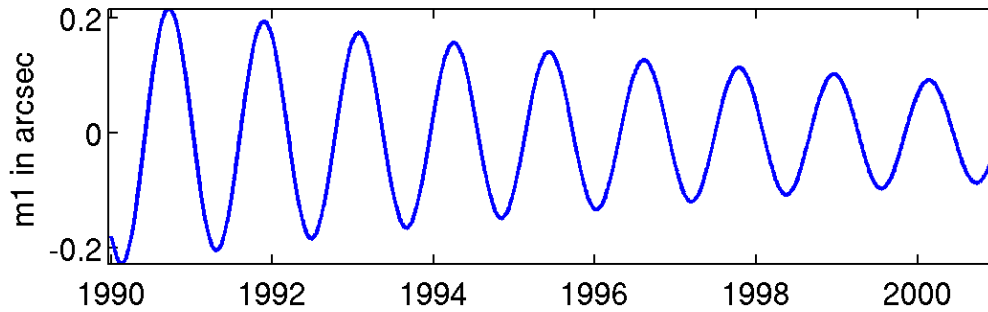
A-Matrix: $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{L}, \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{R}(k_2)} & \frac{\partial F_1}{\partial \mathfrak{I}(k_2)} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{R}(k_2)} & \frac{\partial F_2}{\partial \mathfrak{I}(k_2)} \end{bmatrix}$

Verbesserung der Unbekannten zum Näherungswert:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}} = -(\mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{\parallel} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{\parallel} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{w}$$



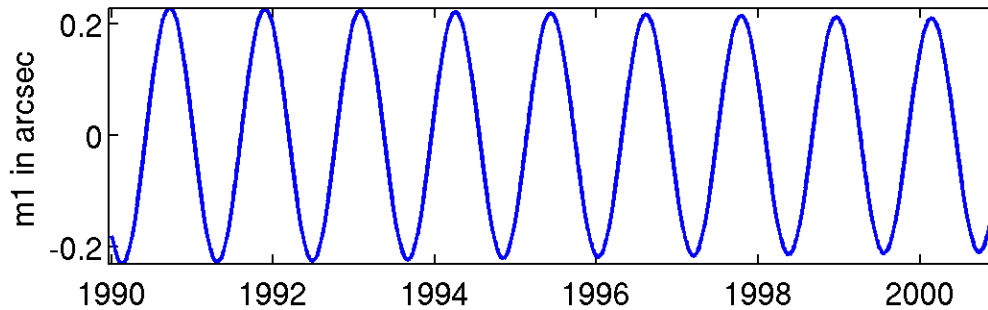
Simulierte Schwingungen



Keine Anregungen

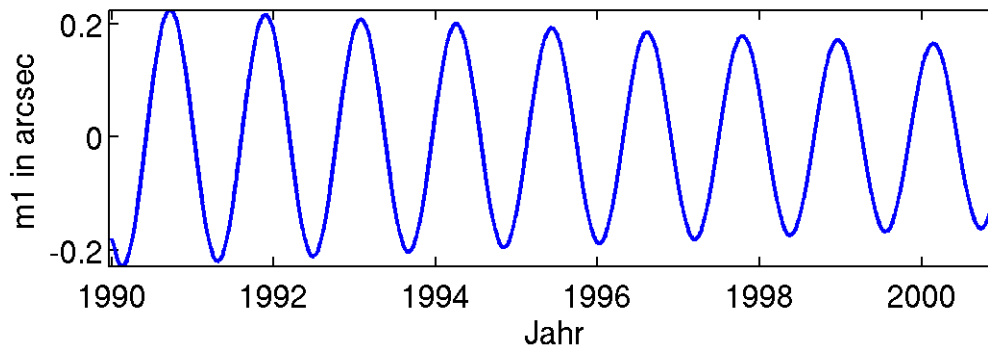
$$k_2 = 0,35 + 0,01i$$

$$\hat{k}_2 = 0,3532 + 0,09975i$$



$$k_2 = 0,35 + 0,001i$$

$$\hat{k}_2 = 0,3532 + 0,0009966i$$



$$k_2 = 0,35 + 0,0036i$$

$$\hat{k}_2 = 0,3532 + 0,03590i$$



Anregungen durch Ozean und Atmosphäre (ECCO und NCEP) berücksichtigt

- Funktionales Modell wird komplizierter:

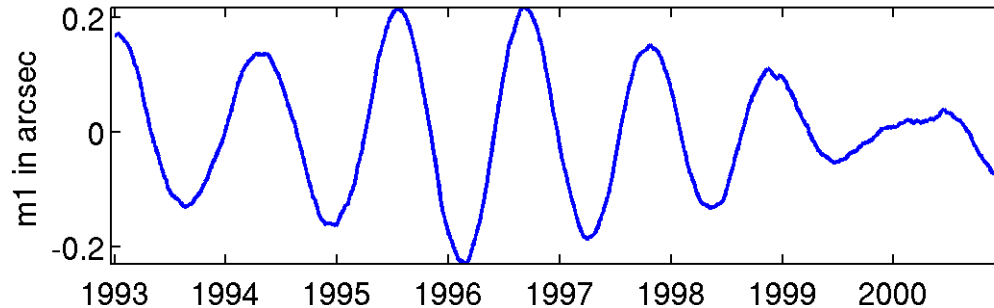
$$F_1 = \dot{m}_1 \cdot \frac{A}{\Omega(C-A)} + m_2 - \frac{1}{(C-A)} \cdot \left[c_{23Anreg} + \frac{\Omega^2 a^5}{3G} (\Re(k_2) \cdot m_2 - \Im(k_2) \cdot m_1) \right] \\ + \frac{1}{\Omega(C-A)} \cdot \left[\dot{c}_{13Anreg} + \frac{\Omega^2 a^5}{3G} (\Re(k_2) \cdot \dot{m}_1 + \Im(k_2) \cdot \dot{m}_2) + \Omega h_2^{Anreg} - \dot{h}_1^{Anreg} \right] = 0$$

$$F_2 = \dot{m}_2 \cdot \frac{A}{\Omega(C-A)} - m_1 + \frac{1}{(C-A)} \cdot \left[c_{13Anreg} + \frac{\Omega^2 a^5}{3G} (\Re(k_2) \cdot m_1 + \Im(k_2) \cdot m_2) \right] \\ + \frac{1}{\Omega(C-A)} \cdot \left[\dot{c}_{23Anreg} + \frac{\Omega^2 a^5}{3G} (\Re(k_2) \cdot \dot{m}_2 - \Im(k_2) \cdot \dot{m}_1) - \Omega h_1^{Anreg} - \dot{h}_2^{Anreg} \right] = 0$$

- A- und B-Matrizen bleiben gleich

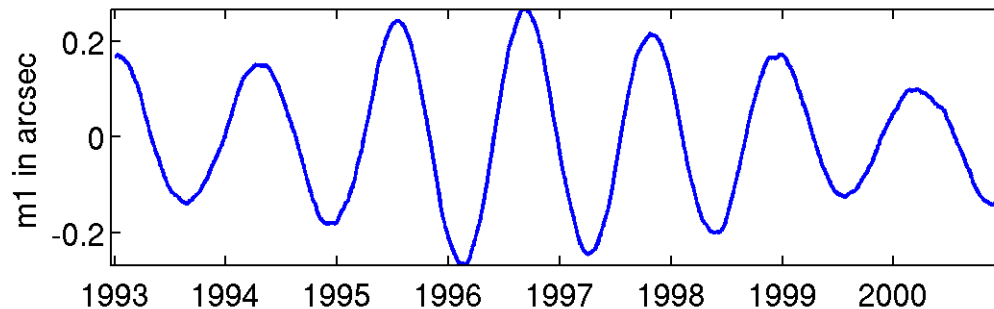


Simulierte Schwingungen mit Anregungen



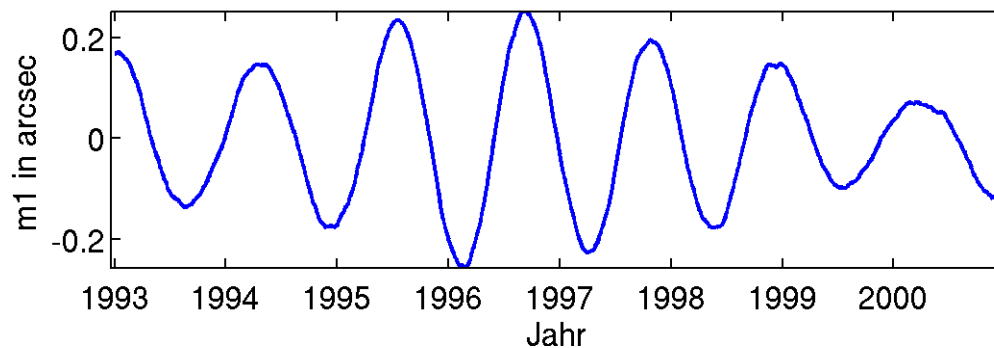
$$k_2 = 0,35 + 0,01i$$

$$\hat{k}_2 = 0,3531 + 0,009924i$$



$$k_2 = 0,35 + 0,001i$$

$$\hat{k}_2 = 0,3531 + 0,0009495i$$

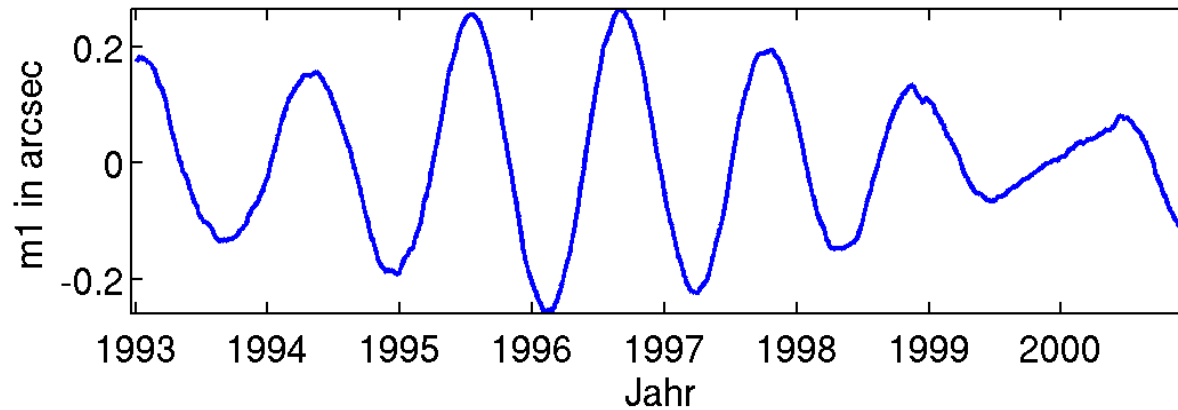


$$k_2 = 0,35 + 0,0036i$$

$$\hat{k}_2 = 0,3531 + 0,003493i$$



C04-Zeitreihe



Ausgleichung:

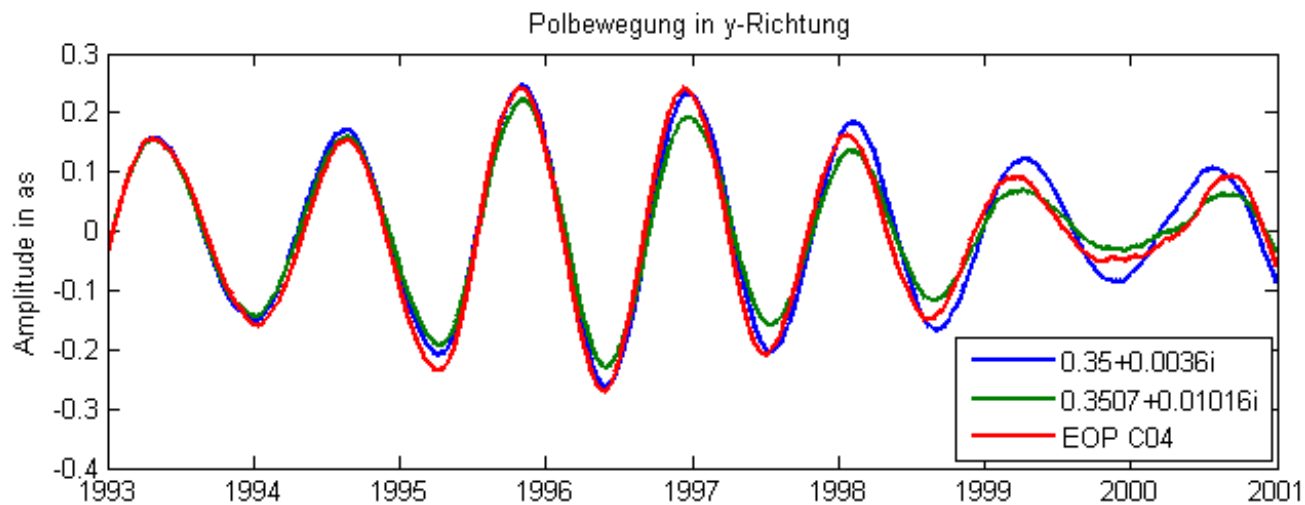
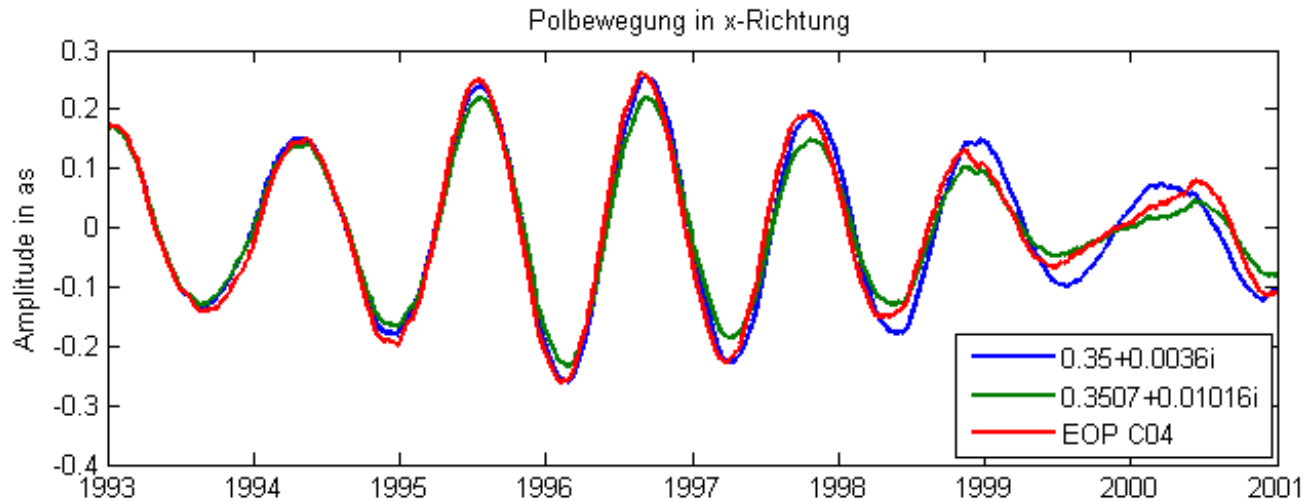
$$\hat{k}_2 = 0,3507 + 0,01016i$$

adaptiver Kalman Filter:

$$\hat{k}_2 = 0,3468 + 0,009460i$$



Vorwärtsmodellierung



Variation des Startzeitpunktes

Zeitbereich	Realteil der Lovezahl	Imaginärteil der Lovezahl
Jan.1988-Dez.1998	0,3517	0,006931
Jan.1989-Dez.1999	0,3517	0,008186
Jan.1990-Dez.2000	0,3526	0,008920
Jan.1991-Dez.2001	0,3541	0,007016
Jan.1992-Dez.2002	0,3543	0,002783
Jan.1993-Dez.2003	0,3524	0,000144
Jan.1994-Dez.2004	0,3516	0,000221
Jan.1995-Dez.2005	0,3523	0,003706
Jan.1996-Dez.2006	0,3573	0,006419
Jan.1997-Dez.2007	0,3591	-0,000158



Ansatz zur Inversion: Adaptive Kalman Filterung

- Kalman Filter bestimmt den Zustand zu einem Zeitschritt anhand aller Messungen und Modellvorhersagen
- Rekursive Berechnung
- Berücksichtigt System- und Messrauschen

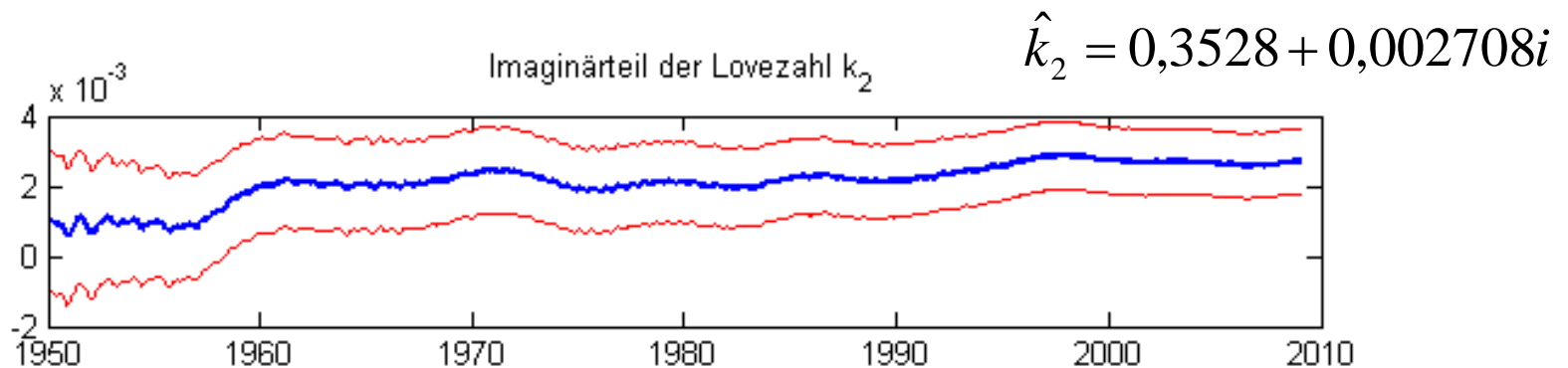
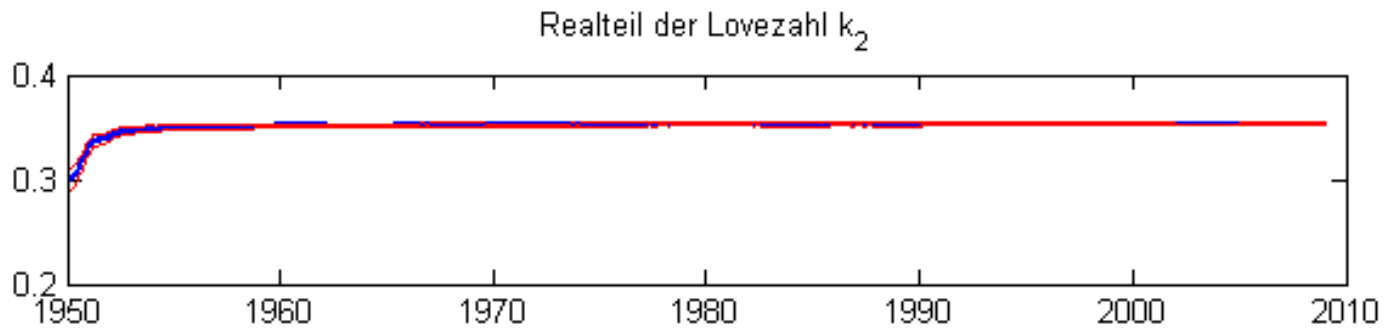
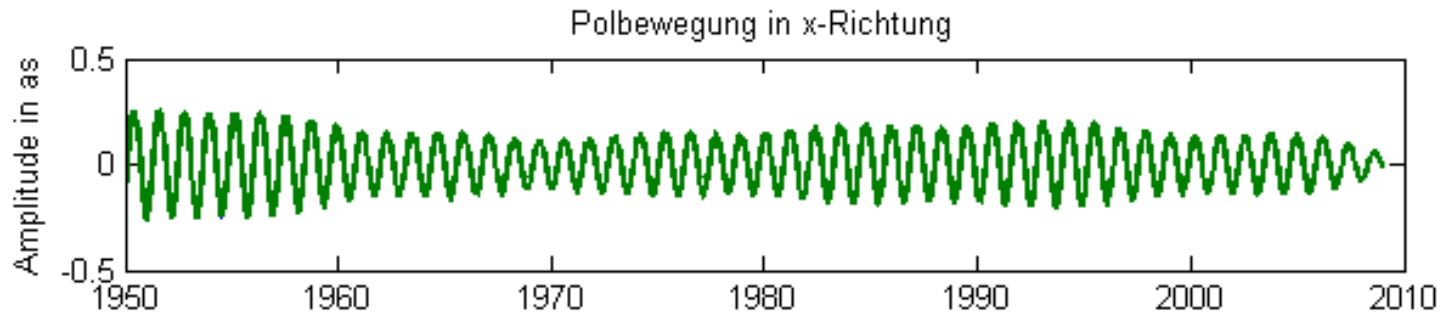
Adaptiver Kalman Filter:

- Parameter des Modells (Lovezahl) werden mitgeschätzt

Genauere Details : Poster von Delf Neubersch et al.
Postersession am Mittwoch



Ergebnisse:



Zusammenfassung

- Ansatz über die Ausgleichsrechnung und über den adaptiven Kalman Filter funktionieren prinzipiell
- Ergebnisse sind abhängig vom gewählten Zeitbereich
 - Mögliche Ursache:
 - Zu kurzer Zeitbereich
 - Anregungsfunktionen zu ungenau und bisher als deterministische Größe eingeführt



Ausblick

- Implementierung der rekursiven Ausgleichung
Vorteil:
 - Ausnutzung der langen Zeitreihe möglich
- Genauere Untersuchung bezüglich des Einflusses der Anregungsfunktionen (Vergleich unterschiedlicher Modelle)

Vielen Dank an die DFG für die Förderung dieser Forschungsarbeiten im Rahmen der Forschergruppe FOR584

