

Zur engen Beziehung der Beschreibung von Rotationen durch Quaternionen und durch bilineare Transformationen

Oswald Glaser

PhD Student (Luft- und Raumfahrttechnik) am Institut für Navigation (INS), Universität Stuttgart
Breitscheidstr. 2, 70174 Stuttgart, glaser@nav.uni-stuttgart.de

Motivation, Ziele und Methodische Ansatz

Motivation: Gleichzeitige räumliche Darstellung von Drehungen einer 3D Kugel sowie der Zentralprojektion der Kugeloberfläche auf eine Ebene lässt uns Drehungen und deren zugehörigen Parameter besser begreifen.

Generelles Arbeitsziel: Vorarbeiten für eine solche Darstellung zu leisten, die später interaktiv bereitgestellt werden soll. **(Absicht dieser Präsentation:** Kritische Anmerkungen zur Verbesserung zu erhalten und eventuell „Mitsreiter“ zu gewinnen, für die verständliche Aufbereitung der Formeln ebenso wie auch für die geplante Realisierung eines interaktiven graphischen Moduls).

Methodischer Ansatz: Die Drehungen einer Kugel im 3D Raum werden visualisiert und durch normierte Quaternionen beschrieben (W.R. Hamilton 1843 [1]). Die Darstellung der Wirkung dieser Drehungen im 3D Raum wird durch die Abbildung der Kugeloberfläche auf eine Ebene ergänzt. Dies kann durch eine bilineare Transformation (Möbius Transformation) realisiert werden. Der Zusammenhang der Komponenten der Dreh-Quaternion und der Parameter der Möbius-Transformation werden möglichst einleuchtend präsentiert und erleichtern das räumliche Verständnis der Drehungen.

Auswahl von Definitionen zu den Rechenregeln für Quaternionen

Quaternionen wurden von W.R. Hamilton 1843 eingeführt. Dies sind viergliedrige komplexe Zahlen mit drei imaginären Richtungen. Sie bilden die „Zahlen“ der höchsten Ordnung, die eine assoziative Divisions-Algebra bilden. Wir bezeichnen eine Quaternion mit einem einfachen Buchstaben (z.B. „q“), die skalaren Anteile vier Komponenten mit demselben Zeichen und tiefgesetzten Indizes von 0 bis 3 und den Vektor-Teil mit Fettdruck – siehe {1}.

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + i \cdot q_1 + j \cdot q_2 + k \cdot q_3 \quad \{1\}$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = i \cdot j \cdot k = -1 \quad \{2\}$$

$$i \cdot j = k; \quad j \cdot i = -k \quad \{3\}$$

$$v = \frac{q}{|q|} = v_0 + \mathbf{v} = v_0 + i \cdot v_1 + j \cdot v_2 + k \cdot v_3 \quad \{4\}$$

$$v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \quad \{5\}$$

$$v_0^2 = 1 - (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \quad \{6\}$$

Die drei komplexen Einheitsvektoren i, j und k verhalten sich bei wechselseitiger Multiplikation anti-kommutativ wie bei den Kreuzprodukten der Vektorrechnung – siehe {2}.

Wesentlicher Unterschied zum Vektor Produkt: das das Produkt jedes Einheitsvektors mit sich selbst verschwindet nicht. Es wird ähnlich dem Skalar-Produkt gebildet, allerdings mit negativem Vorzeichen – siehe {3}.

Zur Beschreibung von Drehungen im 3D Raum verwendet man (Hamilton 1848) normierte Quaternionen (Lit [4]), die Hamilton „versor“ genannt hat, daher hier v als Bezeichnung der Variablen {4}.

Infolge der Normierung gilt die obige (erste) Nebenbedingung {5}. Dadurch kann immer eine der vier Komponenten eines „versors“ durch die drei anderen ausgedrückt werden.

Bereits Hamilton stellte fest, dass der auf die Länge des Imaginärteils normierte Vektor-Teil einer Quaternion in vielen Fällen als Dreh-Achse interpretiert werden kann {7}. Daher nannte er diesen Vektor-Teil „axis“, er besteht aus den drei Richtungs-Kosinus Werten in den drei imaginären Achsen (imaginärer „Einheitsvektor“ {9}).

Hier gibt es eine zweite Nebenbedingung {9}, die es ermöglicht stets einen der drei Winkel durch die beiden anderen auszudrücken.

Durch diese beiden Nebenbedingungen {5} und {9} ist unter Verwendung trigonometrischer Umformungen eine hohe – teils auch verwirrende – Vielfalt an Darstellungen möglich, nur bei wenigen erschließt sich jedoch die räumliche Bedeutung der einzelnen Terme.

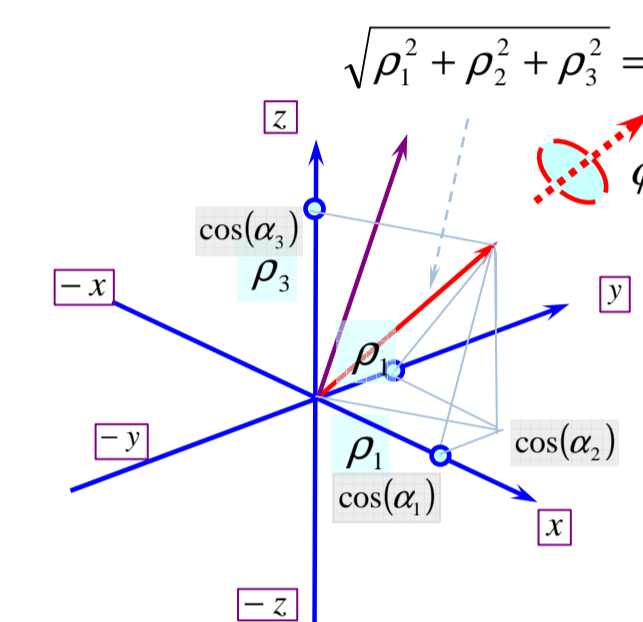
Für unsere Zwecke ist eine polare Darstellung {10} und {11} für den Versor (also: für die Menge aller Punkte im 4D, die vom Ursprung den Abstand 1 haben), besonders geeignet. Wenn wir den Realteil des Versors mit einem Kosinus substituieren, dann ergibt sich wegen der ersten Nebenbedingung {5} ein Sinus desselben Parameters als Faktor der Imaginärteile, siehe {10}.

$$\{7\} \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}}{|q|} \quad \rho^2 = -1 \dots \text{für alle } \mathbf{p} \quad \{8\}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{q}}{|q|} = \begin{cases} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{cases} \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = 1 \quad \{9\}$$

$$v = v_0 + \mathbf{v} = \cos(\varphi/2) + \mathbf{p} \cdot \sin(\varphi/2) \quad \{10\}$$

$$\begin{aligned} v_0 &= \cos(\varphi/2) \\ v_1 &= \cos(\alpha_1) \cdot \sin(\varphi/2) \\ v_2 &= \cos(\alpha_2) \cdot \sin(\varphi/2) \\ v_3 &= \cos(\alpha_3) \cdot \sin(\varphi/2) \end{aligned} \quad \{11\}$$



Nachdem das Quadrat von „axis“ immer gleich „minus eins“ ergibt {9}, ist die Ähnlichkeit zur Euler'schen Formel evident. (Der halbe Winkel wird gewählt, weil man einen Versor als „Pseudo-Wurzel“ der Richtungskosinus Matrix auffassen kann).

Basis Fakten zur bilinearen Transformation (Möbius Transformation)

Die bilineare Transformation {12} ist eine gebrochene Funktion einer komplexen Variablen (hier: z) mit vier komplexen Parametern a, b, c und d. Die aus a, b, c und d gebildete 2 x 2 Matrix H {13} charakterisiert den Typus der Transformation aus den Werten der Spur und den Eigenwerten. Parabolisch, elliptisch (einschl. zirkular), loxodromisch (einschl. hyperbolisch). Im elliptischen Fall (→ Drehungen) hat H die Eigenschaften einer Quaternion.

$$f(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} \quad \{12\}$$

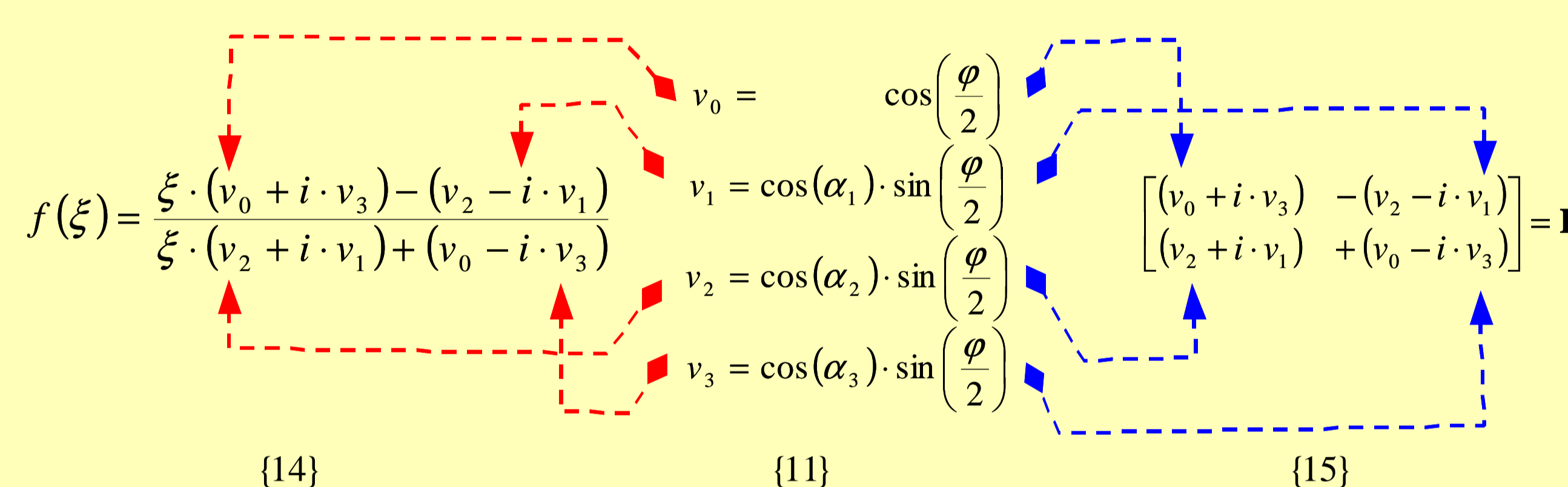
$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \{13\}$$

Historische Anmerkungen

Die besondere Eignung von Quaternionen zur Beschreibung von Drehungen starrer Körper hat Hamilton 1848 kommuniziert. Aus dem selben Jahr stammt die Darstellung von A. Cayley über den Zusammenhang der bilinearen Transformation und den Quaternionen. Diese Darstellung war aber schwer nachvollziehbar und ohne Beweis. Einen sehr schönen Beweis lieferte A. Schönflies 1909, nachdem G. Darboux 1905 ebenfalls zu dem Thema veröffentlicht hatte. Darauf aufbauend veröffentlichte Josef Wellstein 1910 (er war damals noch Student, später Professor in Karlsruhe und Würzburg) eine weiter verbesserte Darstellung der Formeln mit einleuchtenden Zeichnungen.

Der zentrale Ansatz nach [1], [2] und [3]:

Zuordnung der Komponenten der Quaternion {11} zu den vier Parametern der Möbius Transformation {14} u. {15}:



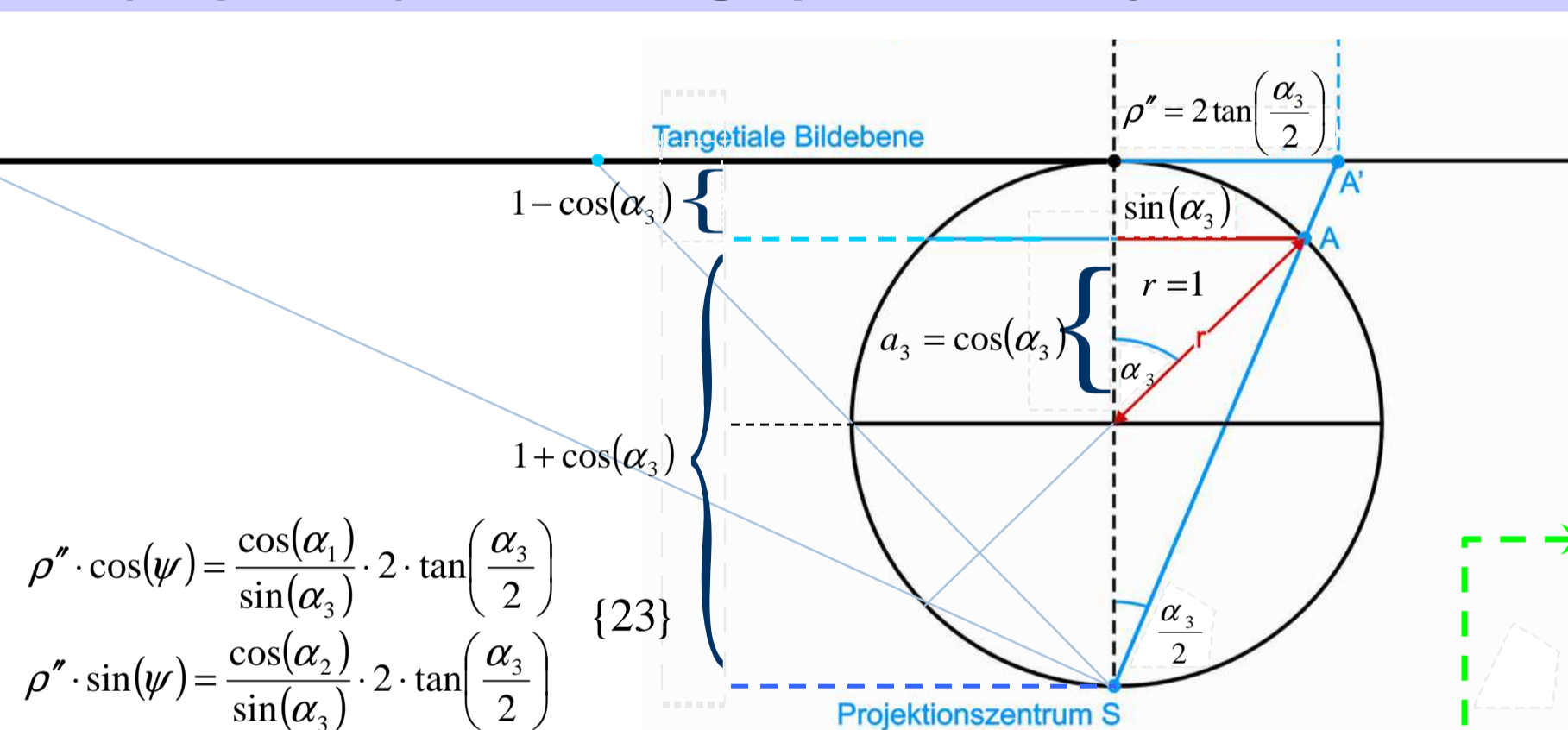
Besonderheiten dieses Ansatzes

- Drehungen ergeben elliptische Transformationen
 - Determinante der H Matrix ist identisch 1, siehe {16}
 - Die Spur der H Matrix ist gleich dem doppelten Sinus des halben Drehwinkels, siehe {17} (oft wird das Quadrat der Spur betrachtet)
 - Die beiden Eigenwerte {19} der H Matrix sind reziprok {18}
 - Die H Matrix hat die Eigenschaften einer Quaternion
 - Bei mehrfacher Anwendung von bilinearen Transformationen können die Parameter aus der Multiplikation der H Matrizen ermittelt werden
- $$\det(H) = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \equiv 1 \quad \{16\}$$
- $$\text{tr}(H) = v_0 + i \cdot v_3 + v_0 - i \cdot v_3 = 2 \cdot v_0 \quad \{17\}$$
- $$\lambda_1 = \lambda_2^{-1} \quad \{18\}$$
- $$\lambda_i = v_0 \pm i \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \cos(\varphi/2) \mp i \cdot \sin(\varphi/2) \quad \{19\}$$
- Zum Verständnis der Projektion in die Ebene helfen folgende Punkte:
- Formel {20} zeigt die Abbildung in den Ursprung
 - Formel {21} zeigt die Abbildung in den uneigentlichen Punkt
- $$\{20\} \quad f(\xi) = 0 \quad \text{when} \quad \xi = \frac{(v_2 - i \cdot v_1)}{(v_0 + i \cdot v_3)}$$
- $$\{21\} \quad f(\xi) = \infty \quad \text{when} \quad \xi = -\frac{(v_0 - i \cdot v_3)}{(v_2 + i \cdot v_1)}$$

Durchstoßpunkte der Drehachse (Fixpunkte) aus stereographischer Projektion bestimmt

Die Stereographische Projektion einer Kugelachse kann so erklärt werden:

$\sin(\alpha_3)$ ist die Diagonale des aus $\cos(\alpha_1)$ und $\cos(\alpha_2)$ gebildeten Rechtecks. Die Projektion in die Tangentialebene erhält man, wenn man $\sin(\alpha_3)$ mit $(1 + \cos(\alpha_3))$ skaliert. Dies muss noch in die Richtungen von $\cos(\alpha_1)$ und $\cos(\alpha_3)$ gespalten werden.



$$\{24\} \quad \gamma_1 = \rho^* \cdot \cos(\varphi) + i \cdot \rho^* \cdot \sin(\varphi) \quad \rho^* \cdot \cos(\varphi) = \frac{\cos(\alpha_1)}{\sin(\alpha_3)} \cdot 2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

$$\{25\} \quad \gamma_1 = \frac{\cos(\alpha_1)}{\sin(\alpha_3)} \cdot 2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) + i \cdot \frac{\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_3)} \cdot 2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)$$

Fixpunkte der Abbildung aus der Transformation bestimmt

$$\{27\} \quad f(\gamma) = \frac{a \cdot \gamma + b}{c \cdot \gamma + d} = \gamma \quad 0 = c \cdot \gamma^2 + (d - a) \cdot \gamma - b \quad \text{Fixpunkt: Funktionswert ist gleich der Variablen}$$

Ergibt → quadratische Gleichung mit 2 Lösungen

$$\{29\} \quad \gamma_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2 \cdot c} = \frac{2 \cdot i \cdot v_3 \pm i \sqrt{4(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}{2 \cdot (v_2 + i \cdot v_1)}$$

Einsetzen der Komponenten des Versors: v_1, v_2, v_3

$$\{30\} \quad \gamma_{1,2} = \begin{cases} \frac{-\cos(\alpha_1) - i \cdot \cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_3) + 1} & \cos(\alpha_3) + 1 \geq 0 \\ \frac{\cos(\alpha_1) + i \cdot \cos(\alpha_2)}{1 - \cos(\alpha_3)} & 1 - \cos(\alpha_3) \geq 0 \end{cases} \quad \gamma_{1,2} = \begin{cases} \frac{-\cos(\alpha_1) - i \cdot \cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_3) + 1} = \frac{-\cos(\alpha_1) - i \cdot \cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_3)} \cdot \tan\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) \\ \frac{+\cos(\alpha_1) + i \cdot \cos(\alpha_2)}{1 - \cos(\alpha_3)} = \frac{+\cos(\alpha_1) + i \cdot \cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_3)} \cdot \cot\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) \end{cases} \quad \{32\}$$

Die analytische Lösung {30} ist zunächst unterschiedlich zu der geometrisch gefundenen, jedoch ist eine Umformung {32} möglich. Sie unterscheidet sich um den Faktor 2, da hier die Projektionsebene im Äquator liegt. Fixpunkte {30} sind nicht reziprok, da ursprungssymmetrisch im 3D, Beträge {33} sind reziprok: $|\gamma_1| = |\gamma_2|^{-1} \quad \{33\}$

Geplante weitere Schritte

Vorbemerkung: Josef Wellstein hat 1910 mit Hand gefertigte Abbildungen der stereographischen Projektion des Lambda-Phi Gitters einer Kugel veröffentlicht [3], in denen er die Winkel vor und nach einer Kugeldrehung anschaulich machte. Siehe [3] und den rechten Teil des rechts stehenden Bildes. Dies kann heute deutlich einfacher und parametrisiert als Computer Animation gezeigt werden.

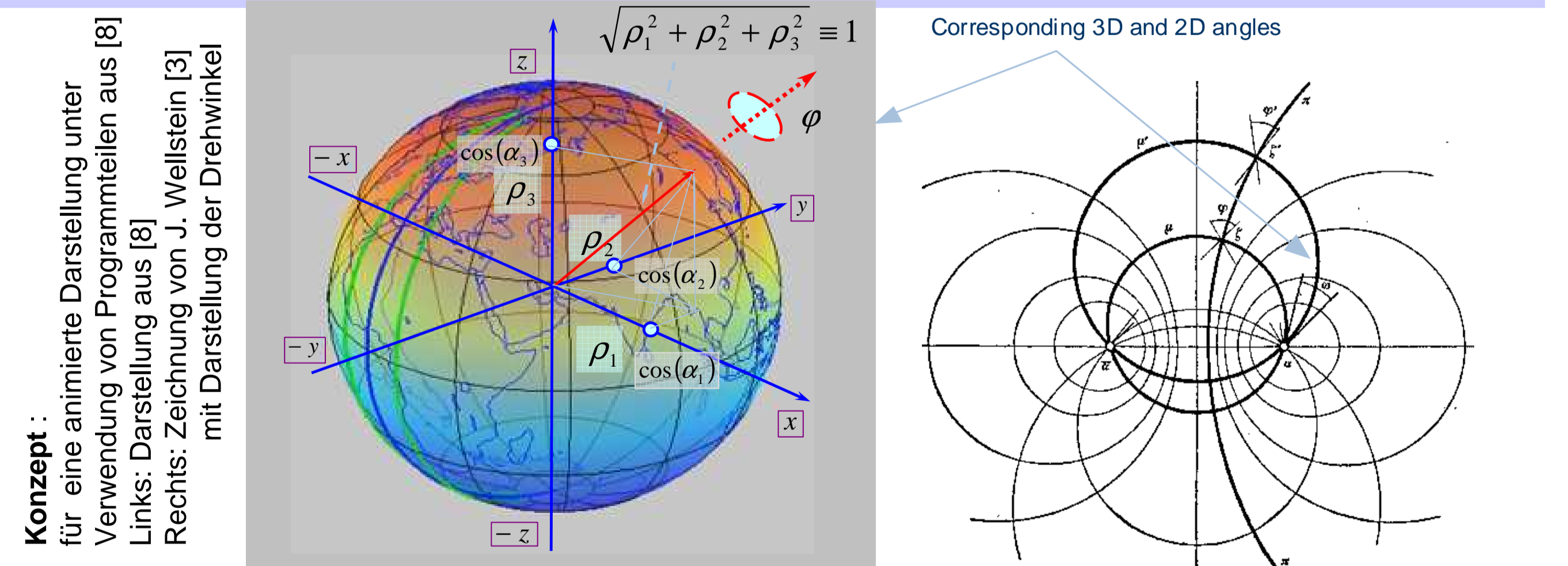
- Zu diesem Zweck sollen Teile der Programme [8] und [9] zur Darstellung und Drehung einer Lambda-Phi parametrisierten Kugel verwendet werden, wie sie links im Bild nebenan zu sehen ist, ergänzt durch das stereographische Bild des Gitternetzes in der Ebene.
- Es gibt bereits animierte Darstellungen der Bilinearen Transformation in der Ebene und der stereographischen Abbildung eines Kartesischen Gitters der Ebene auf die zugehörige Kugel siehe [5]. Dies ist jedoch zu allgemein (enthält parabolische, elliptische, zirkuläre und loxodromische Fälle), so dass die für Rotationen wichtigen Parameter nicht deutlich werden.

Acknowledgement:

- Friedhelm Krumm überließ Teile der MATLAB Programme aus [8] und [9] und gab viele hilfreiche Anregungen-

Ergebnisse und Ausblick

- Die besondere Eignung der polaren Darstellung einer normierten Quaternion zur Beschreibung von Drehungen wurde erneut deutlich gemacht („Dreh-Quaternion“, „normierte Quaternion“ = „Versor“).
- Die von A. Cayley 1848 erstmals gezeigte Zusammenhang zu bilinearen Transformationen wurde untersucht, aus der Vielfalt von möglichen Formulierungen diejenigen ausgesucht, die eine einleuchtende geometrische Deutung ermöglichen.
- Für die charakteristische Matrix H der bilinearen Transformation wurden die Determinante, die Spur und die Eigenwerte aus den Komponenten der Dreh-Quaternion (Versor) dargestellt.



- Die Bildpunkte der Durchstoßpunkte der Drehachse durch die Einheitskugel wurden aus der Geometrie der Stereographischen Projektion einerseits und mit der Cayley-Schönflies Formel andererseits als Fixpunkte der bilinearen Transformation berechnet. Die Koordinaten der beiden Fixpunkte unterscheiden sich vom wechselseitigen Reziprokwert der komplexen Darstellung durch das Vorzeichen des Real-Teiles (Punkt-Symmetrie anstelle Symmetrie zur reellen Achse beim Reziprokwert einer komplexen Größe) und durch den Faktor 2, da bei der Cayley-Formel die Projektionsebene im „Äquator“ liegt (wie heute bei Betrachtung von Kugeln in n-Dimensionen üblich).
- Das Schema der geplanten animierten Darstellung wurde anhand eines Bildes aus der Arbeit von Josef Wellstein gezeigt. Dies soll in ein graphisches Modul implementiert werden.

Beispiele relevanter Literatur

- [1] A. Cayley, Math. Ann. 15 (1879),
- [2] A. Schönflies, Jahresber. deutsch. math. Vereinigung, 18 (1909)
- [3] J. Wellstein, Jahresber. deutsch. math. Vereinigung, 19 (1910)
- [4] A. J. Hanson, Visualizing Quaternions, MK Publishers 2006,
- [5] D. N. Arnold, Möbius Transformations Revealed, video by D. Arnold and J. Rogness
- [6] Jack B. Kuipers Quaternions and Rotation Sequences, Princeton Univers. Press (2002)
- [7] Simon L. Altmann, Rotations, Quaternions, and ... (Dover Books on Mathematics 2013)
- [8] F. Krumm, How to set up a meta pole system by rotations, metapol2.exe, Uni Stuttgart, geoengine Web-Site
- [9] F. Krumm, Rotations & UTM Strip System, animated MP4, http://www.uni-stuttgart.de/gi/geoengine/mappro/

